Guía Conceptual de Procesos Infinitos
Tema: Deducción de Fórmulas básicas de derivación.
Montoya

# Conceptos previos

**LÍMITE:** muchos fenómenos de la naturaleza tienen un punto límite, que no es posible traspasar con los conocimientos actuales. uno de estos puntos es el cero absoluto de la temperatura.

0ºK= -273ºC (inicio de la escala absoluta de temperatura)

La variación de temperatura observada en el universo va desde 1.032ºK, alcanzada en su inicio hasta -273ºC = 0ºK, que hasta el momento es una barrera infranqueable.

Los conceptos fundamentales del cálculo infinitesimal son: variable, función, límite. El concepto de límite debe distinguirse de la variable de una función, definiéndose como una constante a la cual se acercan sus valores sucesivos.

La sucesión 0,9; 0,99; 0,999…., tiende al valor limite 1 y, el limite de la función, como el valor n numérico que adquiere esta cuando la variable tiende a cierto numero real limite. Esto último equivale a decir que la diferencia entre el valor de la función y el valor del límite, es tan pequeña como queramos, como también es la que hay entre la variable y el suyo. Con bases a estas ideas, es fácil comprender la del incremento, concepto fundamental en el cálculo infinitesimal o diferencial.

**Conceptos previos:**

Consideremos la función: $f(x)= 2x+5$

Supongamos un valor a para x , luego :

$f(a) = 2a+5$

Si ahora incrementamos la variable en un valor a+b, se obtiene:

$f(a+b))\ 2(a+b)+5= 2a+2b+5$ . Entonces:

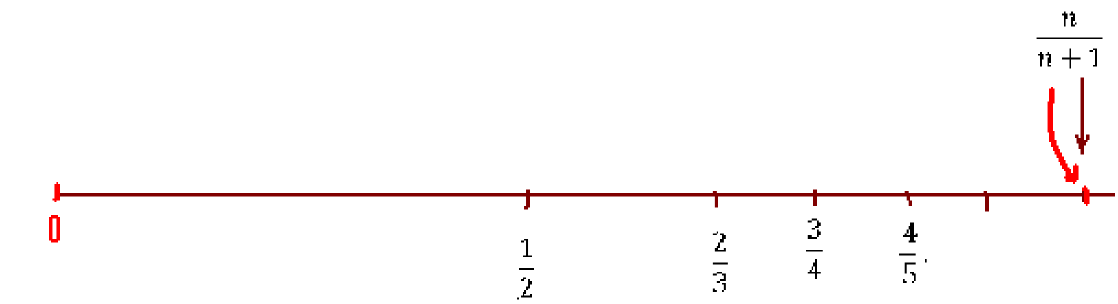
El incremento en la variable es: $a+b-a= b$

El incremento en la función es : $2^a+2b+5-2a-5= 2b$

**LIMITE DE UNA SUCESIÓN**

CONSIDEREMOS LA SUCESIÓN:

$$a_n = \frac{n}{n+1} = \left\{\frac{1}{2} \middle| \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \right\}$$



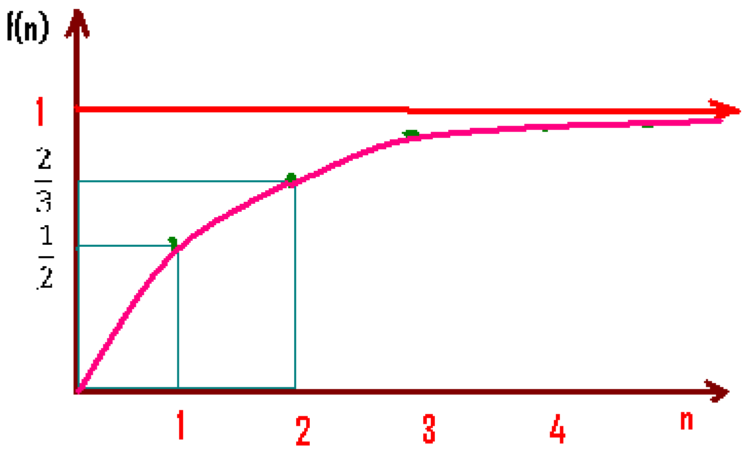

Aquí se observa que los términos de la sucesión

Que representado en la recta numérica: $a_n = \frac{n}{n+1}$ se acercan indefinidamente al numero 1.

En otras palabras si n crece, el valor de $\frac{n}{n+1}$ se aproxima cada vez mas a 1

Así para n=1000, tenemos que $a_n = \frac{n}{n+1} = \frac{1000}{1000+1} = \frac{1000}{1001} = 0{,}9990009$

Ahora si consideramos la función f(n) =$\frac{n}{n+1}$ y establecemos un grafico para ella , se obtiene:




De nuevo se observa que los puntos se acercan indefinidamente a 1. Esto significa que la sucesión es convergente y que su límite es uno.

En general: Si la sucesión : $a_n$ , tiene como limite un numero real a , entonces , a medida que n toma valores cada vez mayores , sucesivamente los términos de la sucesión se acercan indefinidamente al número a

**Deducción analítica de la constante de Euler:**

: $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ (Sucesión de Euler)

Si se aplica el desarrollo del binomio de Newton, se obtiene:

$\lim_{n\to\infty}\left(\mathbf{1}+\frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}[\quad C_0^n 1^0\left(\frac{1}{n}\right)^0 + c_1^n 1^{n-1}\left(\frac{1}{n}\right)^1 + c_2^n 1^{n-2}\left(\frac{1}{n}\right)^2 +$
$c_3^n 1^{n-3}\left(\frac{1}{n}\right)^3$

+.........................+$C_n^n 1^{n-n}\left(\frac{1}{n}\right)^n$ ]

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\frac{1}{5!}+\cdots\ldots\ldots.\frac{1}{n!}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 2+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{24}+\frac{1}{120}+\cdots\ldots\ldots.\frac{1}{n!}$$

Si sumamos solamente las tres primeras fracciones, se obtiene:

$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 2+\frac{43}{60} = 2\frac{43}{60} = \frac{163}{60} = 2.716666667$.., que es un valor bastante cercano al obtenido anteriormente.

**Derivada de f(x) = $x^n$**

Sea f(x)= $x^n$ , n$\epsilon N$

F\`(x)=$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

Como :

$(x+h)^n = C_0^n x^n(h)^0 + c_1^n x^{n-1}(h)^1 + c_2^n x^{n-2}(h)^2 + c_3^n x^{n-3}(h)^3$+..............
...........+$C_n^n x^{n-n}(h)^n$ ]

Entonces:

f$(x+h)^n - f(x) = C_0^n x^n(h)^0 + c_1^n x^{n-1}(h)^1 + c_2^n x^{n-2}(h)^2 + c_3^n x^{n-3}(h)^3$+
.........................+$C_n^n x^{n-n}(h)^n - x^n$

Es decir :
$c_1^n x^{n-1}(h)^1 + c_2^n x^{n-2}(h)^2 + c_3^n x^{n-3}(h)^3$+……………………..+$C_n^n x^{n-n}(h)^n$
Dividiendo por h se obtiene :

$c_1^n x^{n-1} + c_2^n x^{n-2}(h) \quad + c_3^n x^{n-3}(h)^2$+……………………..+$C_n^n x^{n-n}(h)^{n-1}$

Por lo tanto :
F`(x)=$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \to \lim_{h\to 0} \quad c_1^n x^{n-1} + c_2^n x^{n-2}(h) \quad + c_3^n x^{n-3}(h)^2$+
……………………..+$C_n^n x^{n-n}(h)^{n-1}$
F`(x)=$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = c_1^n x^{n-1}$=$nx^{n-1}$
De otro modo:
d($x^n$ )= $nx^{n-1}$dx

**Derivada de una suma de funciones:**
(f+g)`(a)= $\lim_{h\to 0}\frac{(f+g)(a+h)-(f+g)(a)}{h}$=$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)+g(a+h)-f(a)-g(a)}{h}$=
$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} + \lim_{h\to 0}\frac{g(a+h)-g(a)}{h}$, entonces:

(f+g)`(a)=f`(a)+g`(a)

De otro modo:
d(u+v+w+…..)=du+dv+dw+….

**Derivada del producto de una constante por una función:**
F`(ka)=kf`(a)
En efecto, se tiene:
$\lim_{h\to 0}\frac{f(ka+kh)-f(kx)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{k(f(a+h)-f(x))}{h} = k[\quad \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(x)}{h} \quad ]$
=kf`(a)
De otro modo:
d(Ku)=kdu

## Derivada de un producto de funciones:

Si f y g son dos funciones derivables en un punto a , la función f.g también es derivable en el punto a y se cumple:

(f.g)(a) = f`(a).g(a) + f(a).g`(a), en efecto:

Si $f'(a) = \underset{h \to 0}{Lím} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$

$g'(a) = \underset{h \to 0}{Lím} \dfrac{g(a+h)-g(a)}{h}$

Además

$$(f \cdot g)'(a) = \underset{h \to 0}{Lím} \frac{[(f \cdot g)(a+h) - (f \cdot g)(a)]}{h}$$

$$= \underset{h \to 0}{Lím} \frac{[f(a+h) \cdot g(a+h) - f(a) \cdot g(a)]}{h}$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{[f(a+h) \cdot g(a+h) - f(a) \cdot g(a+h) + f(a) \cdot g(a+h) - f(a) \cdot g(a+h)]}{h}$$

$$= \underset{h \to 0}{Lím} \frac{[\{f(a+h) - f(a)\}\{g(a+h)\} + f(a)\{g(a+h) - g(a)\}]}{h}$$

$$= \underset{h \to 0}{Lím} \frac{[f(a+h)]}{h} \cdot g(a + h^{\circ}) + f(a) \cdot \underset{h \to 0}{Lím} \frac{g(a+h) - g(a)}{h}$$

$$= \underset{h \to 0}{Lím} \frac{[f(a+h)]}{h} \cdot g(a) + f(a) \cdot \underset{h \to 0}{Lím} \frac{g(a+h) - g(a)}{h}$$

$$= f'(a) \cdot g(a) + f(a) \cdot g'(a)$$

Entonces (d= derivada)

$$\boxed{\frac{d(f \cdot g)}{dx} = f \cdot \frac{dg}{dx} + g \cdot \frac{df}{dx}}$$

<u>De otro modo:</u>

**d(uv)=udv+vdu**

<u>Ejemplo:</u>

$f(x) = (x^3 + 2x + 3)(3x^2 + 1)$

$f'(x)$- $(x^3+2x+3)\cdot \frac{d}{dx}(3x^2+1)+(3x^2+\mathbf{1})\cdot \frac{d}{dx}(x^3+2x+3)$

= $(x^3+2x+3)(6x)+(3x^2+1)(3x^2+2)$

=$6x^4+12x^3+18x+9x^4+6x^2+3x^2+2$

$= 15x^4+12x^3+9x^2+18x+2$

## DERIVADA DE UN CUOCIENTE

Si f y g son ecuaciones derivables de un punto de a y g (a) ≠0, entonces la función $\frac{f}{g}$ también es derivable en a y se verifica que:

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a)=\frac{g(a)\cdot f'(a)-f(a)\cdot g'(a)}{[g(a)]^2}$$

O bien

$$d\left(\frac{f}{g}\right)=\frac{g\cdot \frac{df}{dx}-f\cdot\frac{dg}{dx}}{g^2}$$

En efecto tenemos que:

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{f}{g}(a+h)-\frac{f}{g}(a)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{f(a+h)}{g(a+h)}-\frac{f(a)}{g(a)}}{h} \cdot \frac{g(a)\cdot g(a+h)}{g(a)\cdot g(a+h)}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{g(a)f(a+h)-f(a)g(a+h)}{hg(a)\cdot g(a+h)}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{g(a)\cdot g(a+h)}\;\frac{[f(a+h)\cdot g(a)-f(a)\cdot g(a)+f(a)g(a)-f(a)\cdot g(a+h)]}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{g(a)\cdot g(a+\cancel{h})}\quad \lim_{h\to 0}\frac{[g(a)\cdot[f(a+h)-f(a)]-f(a)[g(a+h)-g(a)]}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{g(a)\cdot g(a)} - \lim_{h\to 0} \frac{g(a)\cdot[f(a+h)-f(a)]}{h} - \lim_{h\to 0} \frac{f(a)\cdot[g(a+h)-g(a)]}{h}$$

$$= \frac{1}{[g(a)]^2} \cdot [g(a) \cdot \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} - f(a) \cdot \lim_{h\to 0} \frac{g(a+h)-g(a)]}{h}$$

$$= \frac{1}{[g(a)]^2} \lim_{h\to 0} \frac{[g(a)\cdot f'(a) - f(a)\cdot g'(a)]}{h}$$

$$= \frac{g(a)\, f'(a) - f(a)\, g(a)}{[g(a)]^2}$$

Es decir:

$$\left(f/g\right)'(a) = \frac{g(a)\, f'(a) - f(a)\, g'(a)}{[g(a)]^2}$$

Que equivale decir :

$$\boxed{\frac{d}{dx}\left(f/g\right) = \frac{g df/dx - f dg/x}{g^2}}$$

Ejemplo: si $f(x) = \dfrac{2x^2 + 1}{3x - 2}$

$$F(x) = \frac{(3x-2) d / dx\, (2x^2 + 1) - (2x^2 + 1)\, d / dx (3x - 2)}{(3x-2)^2}$$

$$= \frac{(3x-2)\,(4x) - (2x^2 + 1)\,(3)}{(3x-2)^2}$$

$$= \underline{12x^2 - 8x - 6x^2 - 3}$$

$(3x-2)^2$

$$f(x) = \frac{6x^2 - 8x - 3}{(3x-2)^2}$$

## Derivada de expresiones que contienen radicales

Se expresa como potencias y se aplican las reglas que hemos desarrollado hasta aquí.

Ejemplo:

Ej: $f(x) = 2\sqrt[3]{x^2} + 4\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt[5]{x}} + 8$

Se describe $f(x) = 2x^{2/3} + 4x^{½} - x^{-1/5} + 8$

$$2 \times \frac{2}{3}x^{\frac{-1}{3}} + 4 \times \frac{1}{2}x^{\frac{-1}{2}} + \frac{1}{5}x^{\frac{-4}{5}}$$

## Derivada de las funciones trigonométricas

1) Derivada de la función : F(x) = sen x

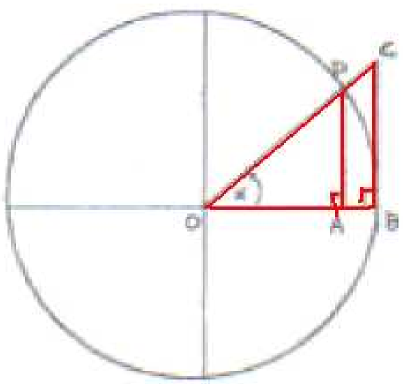
$$F(a) = \lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen}(a+h) - \operatorname{sen} a}{h} \Rightarrow \lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen} a \cos h + \cos a \operatorname{sen} h - \operatorname{sen} a}{h} \Rightarrow \lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen} a(\cos h - 1)}{h} + \frac{\cos a \operatorname{sen} h}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen} a(\cos h - 1)}{h} + \lim_{h\to 0} \frac{\cos a \operatorname{sen} h}{h} \Rightarrow \operatorname{sen} a \lim_{h\to 0} \frac{\cos(h-1)}{h} + \cos a \lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen} h}{h}$$

Ahora bien :

$$\lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen} h}{h} = 1$$

Calculamos el valor del: $\lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen} h}{h}$



Consideremos la circunferencia de centro O y radio R y en ella, las áreas de los

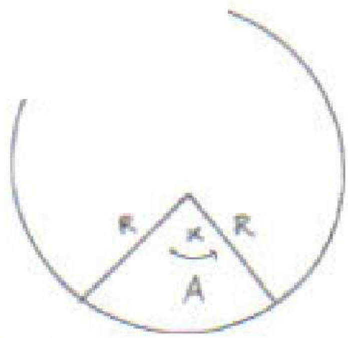
ΔOAD y ΔOBC y el sector circular OBD

El área del ΔOAD es menos que el área del sector circular OBD y ala vez menos que el área del ΔOBC , es decir ,

A´ (ΔOAD) $\leq$ A´ sector circulas OBD $\leq$ A´ (ΔOBC)

$\frac{1}{2}\, OA \cdot AD \leq \frac{XR^2}{2} \leq \frac{1}{2}\, OB \cdot BC \;/ \cdot 2$ Ya que : $\frac{X}{360} = \frac{A´}{\pi R^2}$ $A´ = \frac{X\pi R^2}{360}$ ; $360 = 2\pi$

$A´ = \frac{X\pi R^2}{2\pi} \Rightarrow \boxed{A´ = \frac{XR^2}{2}}$




Luego $OA \cdot AD \leq X R^2 \leq OB \cdot BC$

En OBC . Rectángulo en B : $Tg\, x = \frac{BC}{R} \Rightarrow BC = R\, tg\, x$

En e ΔOAD. Rectángulo en A; $\cos x = \frac{OA}{OD} = \frac{OA}{R}$ Luego : $OA = R \cos x$ , además : $\operatorname{sen} x = \frac{AD}{R}$ ? $AD = R \operatorname{sen} x$

Luego como: $OA \cdot AD \leq X R^2 \leq OB \cdot BC$

$R \cos x \cdot R \operatorname{sen} x \leq X R^2 \leq R \cdot R\, tg\, X$

$R^2 \cos x \operatorname{sen} x \leq X R^2 \leq R^2 tg X \;/ \cdot 1 / \; R^2$

$\operatorname{Cos} x \operatorname{sen} x \leq x \leq tg\, x$

Resolviendo esta inecuación

$\operatorname{Cos} x \leq x \quad / : x ; \; x \leq tg\, x$

$\frac{\operatorname{Cos} x \operatorname{sen} x}{x} \leq 1 \;/ : \cos x ; \Rightarrow x \leq \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} \;/ \cdot \cos x \Rightarrow \frac{\operatorname{Sen} x}{x} \leq \frac{1}{\cos x}$

$x \cos x < \operatorname{sen} x \quad / : x \Rightarrow \cos x \leq \frac{\operatorname{sen} x}{x}$

Luego $\frac{\operatorname{Sen} x}{x} \leq \operatorname{Cos} x \Rightarrow \cos x \leq \frac{\operatorname{sen} x}{x} \leq \frac{1}{\cos x}$

Cuando x tiende cero:

$$\cos \pm 0 \le \frac{\operatorname{sen} x}{x} \le \frac{1}{\cos \pm 0} \Rightarrow 1 \le \frac{\operatorname{sen} x}{x} \le 1 \Rightarrow \text{Luego: } \lim_{h \to 0} \frac{\operatorname{sen} h}{h} = 1$$

**Retomando la deducción**

$$= \operatorname{sen} a \lim_{h \to 0} \frac{(\cos h - 1)}{h} + \cos a \Rightarrow \frac{(\cos h - 1)}{h} = \frac{(\cos h - 1) \cdot (\cos h + 1)}{(\cos h + 1)} + \cos a = \frac{\cos^2 h - 1}{h(\cos h + 1)} + \cos a$$

$$= \frac{\operatorname{sen}^2 h - 1}{h(\cos h + 1)} + \cos a = \frac{-\operatorname{sen} h}{h} \cdot \frac{-\operatorname{sen} h}{(\cos h + 1)} + \cos a \Rightarrow = \operatorname{sen} a \cdot 1 \cdot \lim_{h \to 0} \frac{-\operatorname{sen} h}{(\cos h + 1)} + \cos a$$

$$= \operatorname{sen} a \cdot 0 + \cos a \Rightarrow F(a) = \cos a$$

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{sen} x) = \cos x$$

## Deducción de la derivada de Y = cos x

Sean f (x) = cos x = sen ( (π / 2) – x )

Sea g(x) = ( (π / 2) – x )

Engonces g´(x) = -1

F(x) = sen g (x)

F´(x) = g´(x) cos g(x)

F´(x) = -1 cos [(π / 2) – x]

| F´(x) = -1 sen x |
|---|

De otro modo: d(cosx)=senx dx

| Derivada de f(x) = tg x |
|---|

Como f (x) = sen x / cos x

Aplicando la regla del cuociente

$$F'(x) = \frac{\cos x \cdot d(\operatorname{sen} x) - \operatorname{sen} x \, d(\cos x)}{\operatorname{Cos}^2 x}$$

$$= \frac{\cos x \cdot \cos x - \operatorname{sen} x \cdot - \operatorname{sen} x}{\operatorname{Cos}^2 x}$$

$$= \frac{\operatorname{Cos}^2 x + \operatorname{Sen}^2 x}{\operatorname{Cos}^2 x}$$

$F'(x) = 1/ \operatorname{Cos}^2 x$

Es decir: $d(tgx) = \sec^2 x dx$

| Derivada de la cotangente de f(x)= ctg x |
|---|

$F(x) = 1/tg\ x$

$$F(x) = \frac{tg\ x \frac{d}{dx}(1) - 1 \frac{d}{dx}(tg\ x)}{Tg^2 x}$$

$$= \frac{Tg\ x \cdot 0 - 1 \cdot \sec^2 x}{Tg^2 x}$$

$$= \frac{-\sec^2 x}{Tg^2 x}$$

$$= \frac{-1}{\cos^2 x} \cdot \frac{\cos^2 x}{\operatorname{sen}^2 x}$$

$$= \frac{-1}{\operatorname{sen}^2 x}$$

$f(x) = -\csc^2 x$

Es decir :

Es decir: $d(ctgx) = -\csc^2 x dx$

| |
|---|
| Derivada de la función f(x) = Ln x |

F(x) = Ln x

$$F(a) = \lim_{h \to 0} \frac{\ln(a+h) - \ln a}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\ln[(a+h)/a]}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\ln(1 + h/a)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\ln(1+1/a)}{\frac{ah}{a}}$$

Derivada de la función exponencial $f(x) = a^x$

La función exponencial es la inversa de la función logarítmica. Así pues para calcular su derivada utilizaremos la expresión obtenida para la derivada inversa es decir,

$$e'(x) = \frac{1}{\ln' e^x} = \frac{1}{1/e^x} = e^x \text{ , es decir } \frac{d}{dx}(e^x) = e^x$$

Por consiguiente la derivada de la función exponencial coincide. Con ella misma.

Por lo tanto, si $f(x) = e^x$

Entonces $f'(x) = e^x$

En el caso que la base sea a > 0 , tendremos f(x) es $= a^x = (e^{\ln a})^a = e^{x\ln a}$

De donde resulta que $f'(x) = e^{x\ln a} \cdot \ln a$

Luego :

$F'(x) = a^{x} \cdot \ln a$

$$\boxed{\text{Entonces } \frac{d}{dx}(a^x) = a^x \ln a}$$

Obs: Demostremos que $e^x = e^{x\ln a}$

Sea x = x

$\text{Log}_a\, a^x = x \cdot \ln a \cdot \ln e / \ln a$ ; $\ln e = 1$

$\text{Log}_a\, a^x = x \ln a \log_a e$

$= \log_a e^{x\ln a}$

$= a^x = e^{x\ln a}$

# Derivada de funciones compuestas (regla de la cadena )

Para derivar funciones compuestas se utiliza el siguiente teorema, conocido con el nombre de la regla de la cadena.

Consideremos la función f(x), que es la composición de g(x) y h(x), de modo que f(x) es igual a (log)(x).

Si la función f es derivable en el punto a y la función h es derivable en el punto g(a), entonces la función f es derivable en el punto a y se verifica que :

$F'(a) = h'(g(a)) \cdot g'(a)$

En efecto: Si $F(x) = (h \cdot g)(x)$

$F(x) = h(g(x))$

$$f'(x) = \lim_{x \to a} \frac{h(g(x)) - h(g(a))}{x-a}$$

Ahora bien si g (x) – g(a) ≠ , para todo x situado en un entorno de a que sea distinto de a tendremos que :

$$F(x) = \lim_{x \to a} \frac{h(g(h)) - h(g(a))}{g(x) - g(a)} \cdot \frac{g(x) - g(a)}{x-a}$$

$f(x) = \lim$ $\underline{h(g(h)) - h(g(a))}$ $\cdot$ $\lim$ $\underline{g(x) - g(a)}$

x→a        g(x) – g(a)            x→a        x-a

f´(x) = h´( g(a))  · g´(a)

lo que demuestra la proposición

ejemplo :

sea $f(x) = (x^2 + 5x^3)^3$

supongamos que $x^2 + 5x^3 = u(x)$ entonces $u´(x) = 2x + 15x^2$

Entonces $f(x) = u^3$

O bien $f(x) = (u(x))^3$

Aplicando la regla de la cadena

$f´(x)= 3u(x)^{3-1} \cdot u´(x)$

$f´(x) = 3(x^2+5x^3)^2 \cdot (2x + 15x^2)$

$f´(x)= 6x^5 + 105x^6 +600x^7 + 1125x^8$

En efecto desarrollando el cubo $f(x) = (x^2 + 5x^3)^3$

$F(x)= x^6 + 15x^7 + 75x^8 + 125x^9$

$F´(x)= 6x^5 + 105x^6 +600x^7 + 1125x^8$

## Derivada de f(x) = lnx

Lím $\frac{Ln\,(1+\frac{h}{a})}{a\cdot\frac{h}{a}}$

h→0

Lím $\frac{1}{a}\,\frac{1}{\frac{h}{a}}\,Ln(1+\frac{h}{a})$

h→0

Lím $\frac{1}{a}\,\frac{a}{h}\,Ln(1+\frac{h}{a})$

h→0

Lím

h→0 $\frac{1}{a}\,Ln(1+\frac{h}{a})^{a/h}$

$= \frac{1}{a}$ Lím $Ln(1+\frac{h}{a})^{a/h}$

h→0

$= \frac{1}{a}$ Lím Ln $\left(1+\frac{1}{a/h}\right)$ ; pero $\left(1+\frac{1}{a/h}\right)^{a/h}$ = e

h→0

$= \frac{1}{a}$ Lím Ln e , como Ln e = 1

h→0

$\frac{1}{a}$ Lím 1

h→0

$f(a) = \frac{1}{a} \cdot \mathbf{1} = \frac{1}{a}$ $\cdot$ *Luego* $\frac{d}{dx}(Ln\ x) = \frac{1}{x}$

$\boxed{\text{Derivada de la función } f(x) = Loga \quad x}$

Si $f(x) = Loga \quad x$ Si aplicamos Ln para cambiar de base se obtiene

$f(x) = \frac{Lnx}{Lna}$

o bien $f(x) = \frac{1}{Lna} Lnx$

de modo que

$f'(x) = \frac{1}{Lna}\frac{d}{dx}(Lnx) \rightarrow f'(x)\frac{1}{Lna} \cdot \frac{1}{x}$

que equivale a $f'(x) = \frac{1}{x} Lna, entonces \frac{d}{dx}(loga\ x) = \frac{1}{xLna}$

Derivada de la función $f(x) = Loga \quad x$

Como sabemos $\log x = \log_{10} x$ , luego $\frac{d}{dx}((\log_{10} x) = \frac{1}{10\ Lnx}$

O bien:

$$\boxed{\frac{d}{dx}(Log\ x) = \frac{1}{10Lnx}}$$